2013年 理系 第1問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 2次関数 $f(x)=-x^2-2x+1$, $g(x)=-2x^2+px+q$ について，以下の設問に答えよ．ただし，$g(1)=-2$, $g(-1)=0$ であり，p, q は実数の定数とする．各設問とも，解答とともに導出過程も記述せよ．

(1) p と q の値を求めよ．

(2) $f(x)<g(x)$ となる x の値の範囲を求めよ．

(3) $h(x)$ を次のように定義する．

$f(x)\geqq g(x)$ の場合は $h(x)=f(x)$

$f(x)<g(x)$ の場合は $h(x)=g(x)$

次に，正の実数 k に対して $M(k)$ と $m(k)$ を次のように定義する．

$M(k)$ は $-k\leqq x\leqq k$ における $h(x)$ の最大値

$m(k)$ は $-k\leqq x\leqq k$ における $h(x)$ の最小値

(i) $M(2)$ と $m(2)$ の値を求めよ．

(ii) $M(k)$ と $m(k)$ の値を k を用いて表せ．

(1) $g(1)=-2$ より，$p+q-2=-2$　$\therefore\ p+q=0\ \cdots①$

$g(-1)=0$ より，$-p+q-2=0$　$\therefore\ -p+q=2\ \cdots②$

①，② より，$\underline{p=-1,\ q=1}$ //

(2) $f(x)-g(x)=-x^2-2x+1-(-2x^2-x+1)$

$=x^2-x$

$=x(x-1)$

$\therefore$ $f(x)<g(x)$ より，$f(x)-g(x)<0$ なので，

$x(x-1)<0$　$\therefore\ \underline{0<x<1}$ //

(3) (2) より，$0<x<1$ のときは．$h(x)=g(x)=-2x^2-x+1$

$x\leqq 0$ または $1\leqq x$ のときは．$h(x)=f(x)=-x^2-2x+1$

まとめると，

$$h(x)=\begin{cases}-2x^2-x+1 & (0<x<1\text{ のとき})\\ -x^2-2x+1 & (x\leqq 0,\ 1\leqq x\text{ のとき})\end{cases}$$

$-2x^2-x+1=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

$-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$

であるから，$y=h(x)$ のグラフは，次のページのようになる．

2013年 理系 第1問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{1}$ 2次関数 $f(x) = -x^2 - 2x + 1$, $g(x) = -2x^2 + px + q$ について，以下の設問に答えよ．ただし，$g(1) = -2$, $g(-1) = 0$ であり，p, q は実数の定数とする．各設問とも，解答とともに導出過程も記述せよ．

(1) p と q の値を求めよ．

(2) $f(x) < g(x)$ となる x の値の範囲を求めよ．

(3) $h(x)$ を次のように定義する．

$f(x) \geqq g(x)$ の場合は $h(x) = f(x)$

$f(x) < g(x)$ の場合は $h(x) = g(x)$

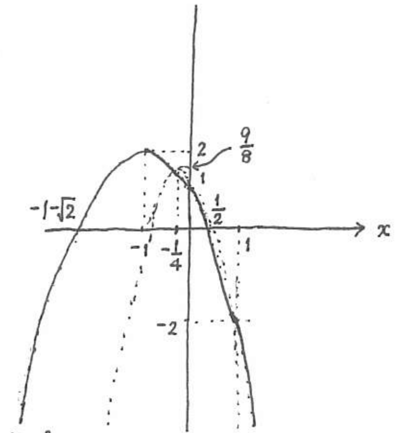
次に，正の実数 k に対して $M(k)$ と $m(k)$ を次のように定義する．

$M(k)$ は $-k \leqq x \leqq k$ における $h(x)$ の最大値

$m(k)$ は $-k \leqq x \leqq k$ における $h(x)$ の最小値

(i) $M(2)$ と $m(2)$ の値を求めよ．

(ii) $M(k)$ と $m(k)$ の値を k を用いて表せ．



(i) 右の図より，

$\underline{M(2) = h(-1) = 2}$ //

$\underline{m(2) = h(2) = -7}$ //

(ii) $0 < k \leqq 1$ においては，$h(x)$ は単調減少より，

$M(k) = h(-k) = -k^2 + 2k + 1$

$m(k) = h(k) = -2k^2 - k + 1$

$1 < k$ においては，

$M(k) = h(-1) = 2$

$m(k) = h(k) = -k^2 - 2k + 1$

以上をまとめると，

$$\begin{cases} M(k) = \begin{cases} -k^2 + 2k + 1 & (0 < k \leqq 1) \\ 2 & (k > 1) \end{cases} \\ m(k) = \begin{cases} -2k^2 - k + 1 & (0 < k \leqq 1) \\ -k^2 - 2k + 1 & (k > 1) \end{cases} \end{cases}$$

//