

2014年システム科学技術学部 第4問

4 平面上に三つの異なる定点  $O, A, B$  がある。線分  $AB$  の中点を  $M$  とする。また、同じ平面上に動点  $P$  があり、 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$  を満たす。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$  とする。以下の設問に答えよ。(1) は解答のみでよく、(2), (3) は解答とともに導出過程も記述せよ。

(1)  $\vec{m}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。

(2)  $|\overrightarrow{MP}|$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。

(3)  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{14}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$  が成り立つ。また、 $\vec{a}$  と  $\vec{m}$  のなす角を  $\alpha$ ,  $\vec{a}$  と  $\overrightarrow{MP}$  のなす角を  $\beta$  とする。ただし、 $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$  とする。以下の設問 (i), (ii), (iii) に答えよ。

(i)  $\cos \alpha$  の値を求めよ。

(ii)  $\triangle OPA$  の面積が最大となるときの  $\beta$  の値を求めよ。

(iii)  $\triangle OPA$  の面積の最大値を求めよ。