岡山県立大学

2015年第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{a_n}{n+1} + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ．

(1) $n=1$ を代入して．

$$S_1 = \frac{a_1}{2} + 1$$

$S_1 = a_1$ より．$\underline{a_1 = 2}$ //

(2) $S_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{n+2} + 1 \quad \cdots ①$

$S_n = \dfrac{a_n}{n+1} + 1 \quad \cdots ②$

①−② より．$a_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{n+2} - \dfrac{a_n}{n+1}$ 　$\therefore a_{n+1} = -\dfrac{n+2}{(n+1)^2} a_n \quad \cdots ③$

よって，$n \geqq 2$ のとき．③ をくり返し用いて．

$$a_n = -\frac{n+1}{n^2} a_{n-1} = \left(-\frac{n+1}{n^2}\right)\cdot\left(-\frac{n}{(n-1)^2}\right) a_{n-2} = \cdots = \left(-\frac{n+1}{n^2}\right)\cdot\left(-\frac{n}{(n-1)^2}\right)\cdots\left(-\frac{3}{2^2}\right)\cdot a_1$$

$$\therefore a_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n+1)!}{n!\cdot n!}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2$$

$\therefore \underline{a_n = (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n+1}{n!}}$ // 　これは $n=1$ のときも成り立つ

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n!} + 1\right\}$$

$$\therefore \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n!} + 1\right)}_{=1} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqq \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!} + 1\right)}_{=1}$$

はさみうちの原理 より．

$\underline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1}$ //