0001874545218999

青山学院大学

2014年 理工A方式 第2問

数理 石井K

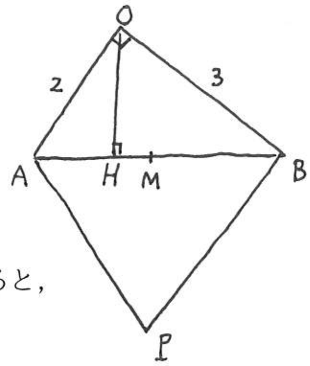
$\boxed{2}$ 平面上に，$\angle AOB = \frac{\pi}{2}$，$OA = 2$，$OB = 3$ であるような三角形OABがある．辺ABの中点をMとする．三角形ABPが正三角形になるように，直線ABに関して点Oの反対側に点Pをとる．このとき，

(1) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\boxed{13}\ 1}{\boxed{14}\ 2}\overrightarrow{OA} + \dfrac{\boxed{15}\ 1}{\boxed{16}\ 2}\overrightarrow{OB}$ である．

(2) 点Oから辺ABに垂線を下ろし，辺ABとの交点をHとすると，

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\boxed{17}\ 9}{\boxed{18}\boxed{19}\ 13}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{20}\ 4}{\boxed{21}\boxed{22}\ 13}\overrightarrow{OB}$$

である．



(3) $MP = \dfrac{\sqrt{\boxed{23}\boxed{24}}\ 39}{\boxed{25}\ 2}$ で，$\overrightarrow{MP}$ と $\overrightarrow{OH}$ とが平行であることに注意すると，

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\boxed{26}\ 3\sqrt{\boxed{27}\ 3}}{\boxed{28}\ 4}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{\boxed{29}\ 3}}{\boxed{30}\ 3}\overrightarrow{OB}$$

である．

(1) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ //

(2) 三平方の定理より $AB = \sqrt{13}$　また $\triangle OAB \backsim \triangle HAO$ より

$AB : AO = OA : HA$　$\therefore AH = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$　$\therefore HB = \frac{9\sqrt{13}}{13}$

$\therefore \overrightarrow{OH} = \frac{9}{13}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{13}\overrightarrow{OB}$ //

(3) $AB = \sqrt{13}$ より正三角形の一辺の長さは $\sqrt{13}$　$\therefore MP = \frac{\sqrt{39}}{2}$ //

$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{OH}$ と表せるので，$\overrightarrow{MP} = \frac{9}{13}k\overrightarrow{OA} + \frac{4}{13}k\overrightarrow{OB}$ $(k > 0)$

このとき，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ に注意すると，$|\overrightarrow{MP}|^2 = \frac{9^2}{13^2}k^2\cdot 4 + \frac{4^2}{13^2}k^2\cdot 9$

$\therefore |\overrightarrow{MP}|^2 = \frac{36}{13}k^2$　$\therefore |\overrightarrow{MP}| = \frac{6}{\sqrt{13}}k$　$\therefore \frac{6}{\sqrt{13}}k = \frac{\sqrt{39}}{2}$ より $k = \frac{13\sqrt{3}}{12}$

$\therefore \overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB}$ //