

2011年理工A方式第5問

5 曲線 $y = e^{x^2} - 1$ ($x \geq 0$) を y 軸のまわりに回転させてできる容器がある。この容器に、時刻 t における水の体積が vt となるように、単位時間あたり v の割合で水を注入する。ただし、 v は正の定数であり、 y 軸の負の方向を鉛直下方とする。

(1) 不定積分 $\int \log(y+1) dy$ を求めよ。

(2) 水面の高さが h となったときの容器内の水の体積 V を、 h を用いて表せ。ただし、 h は容器の底から測った高さである。

(3) 水面の高さが $e^{10} - 1$ となった瞬間における、水面の高さの変化率 $\frac{dh}{dt}$ を求めよ。