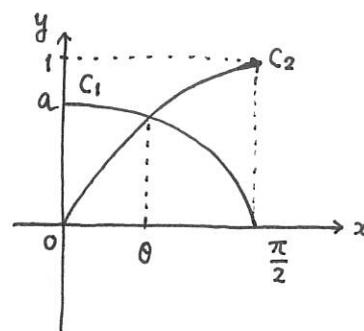


2013年理工B方式第4問

4  $a$  を正の定数とし、関数  $y = a \cos x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) のグラフを  $C_1$ 、関数  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) のグラフを  $C_2$  とする。

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  の交点の  $x$  座標を  $\theta$  とするとき、 $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  を  $a$  を用いて表せ。  
 (2)  $C_1$  と  $x$  軸、 $y$  軸で囲まれた図形が、 $C_2$  によって面積の等しい2つの部分に分かれるとする。このとき、 $a$  の値を求めよ。



(1)  $a \cos \theta = \sin \theta$  の両辺を2乗して

$$a^2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\therefore a^2 (1 - \sin^2 \theta) = \sin^2 \theta$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{a^2}{a^2 + 1}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin \theta > 0 \quad \therefore \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} //$$

(2)  $2 \int_0^{\theta} a \cos x - \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos x \, dx$  が成り立つから

$$2 [a \sin x + \cos x]_0^{\theta} = [a \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore 2a \sin \theta + 2 \cos \theta - 2 = a$$

(1) より、 $\frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}} - 2 = a$

$$2\sqrt{a^2 + 1} = a + 2$$

両辺2乗して、 $4a^2 + 4 = a^2 + 4a + 4$

$$\therefore a(3a - 4) = 0$$

$a > 0$  より、 $a = \frac{4}{3}$  //