0002229810777999

# 青山学院大学

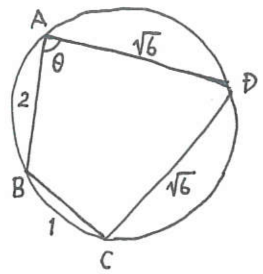
2016年 理工B方式 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 四角形 ABCD が円に内接しており，4 辺の長さが

$$AB = 2,\quad BC = 1,\quad CD = DA = \sqrt{6}$$

である．




(1) $\angle BAD = \theta$ とおくと，$\angle BCD = \pi - \theta$ であることから

$$BD = \overset{2}{\boxed{10}}\sqrt{\overset{2}{\boxed{11}}},\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{\overset{6}{\boxed{12}}}}{\underset{1}{\boxed{13}}\,\underset{2}{\boxed{14}}}$$

となる．さらに，$\overrightarrow{BA}$ と $\overrightarrow{BD}$ の内積は $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} = \underset{3}{\boxed{15}}$ である．

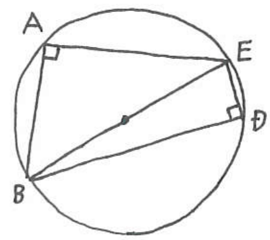
(2) E を BE が直径となる円周上の点とすると，

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE} = \underset{4}{\boxed{16}},\quad \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE} = \underset{8}{\boxed{17}}$$

である．したがって，

$$\overrightarrow{BE} = \frac{\overset{8}{\boxed{18}}}{\underset{2}{\boxed{19}}\,\underset{3}{\boxed{20}}}\overrightarrow{BA} + \frac{\overset{2}{\boxed{21}}\,\overset{0}{\boxed{22}}}{\underset{2}{\boxed{23}}\,\underset{3}{\boxed{24}}}\overrightarrow{BD}$$

である．




(1) 余弦定理より，

$BD^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{6}\cos\theta$ 　　よって，$BD^2 = 10 - 4\sqrt{6}\cos\theta$ …①

$BD^2 = 1^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{6}\cos(\pi - \theta)$ 　　よって，$BD^2 = 7 + 2\sqrt{6}\cos\theta$ …②

① + 2×② より，$3BD^2 = 24$ 　$\therefore\ \underline{BD = 2\sqrt{2}}$ 〃 　① より，$\underline{\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{12}}$ 〃

余弦定理より $\cos\angle ABD = \dfrac{2^2 + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2}{2\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

$\therefore\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{8} = \underline{3}$ 〃

(2) 正弦定理より円の半径を R とすると，$\dfrac{BD}{\sin\theta} = 2R$ 　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$ より $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{138}}{12}$

$\therefore\ 2R = \dfrac{24}{\sqrt{69}}$ 　△ABE は直角三角形より，$\cos\angle ABE = \dfrac{2}{2R} = \dfrac{\sqrt{69}}{12}$

$\therefore\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE} = 2\cdot\dfrac{24}{\sqrt{69}}\cdot\dfrac{\sqrt{69}}{12} = \underline{4}$ 〃 　同様に，$\cos\angle EBD = \dfrac{2\sqrt{2}}{2R}$ 　$\therefore\ \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE} = 2\sqrt{2}\cdot 2R\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{2R} = \underline{8}$ 〃

$\overrightarrow{BE} = s\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{BD}$ とおくと，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE} = s|\overrightarrow{BA}|^2 + t\,\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA} = 4s + 3t$ 　$\therefore\ 4s + 3t = 4$ …③

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE} = s\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} + t|\overrightarrow{BD}|^2 = 3s + 8t = 8$ …④ 　③，④より，$s = \dfrac{8}{23},\ t = \dfrac{20}{23}$ 　$\therefore$

$\underline{\overrightarrow{BE} = \dfrac{8}{23}\overrightarrow{BA} + \dfrac{20}{23}\overrightarrow{BD}}$ 〃