



2017年理学部第2問

2 α を複素数の定数とし、自然数 n に対して複素数 z_n を

$$z_1 = 0, \quad z_{n+1} = \alpha z_n + 1 - \alpha$$

で定める。以下の各問に答えよ。

- (1) z_2, z_3, z_4 をそれぞれ α を用いて表せ。
- (2) 一般の n について z_n を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。
以下では、 $\alpha = \frac{1}{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。ただし、 i は虚数単位を表し、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (3) $\frac{\theta}{\pi}$ が無理数であるとき、どんな自然数 n に対しても z_{n+1} は実数にならないことを示せ。
- (4) 自然数 n に対して、複素数平面上の2点 z_n と z_{n+1} との距離を l_n とする。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ の和 L を求めよ。
さらに、 θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき、 L の最大値とそのときの θ の値を求めよ。