琉球大学

2014年 第3問

$\boxed{3}$ 整数 m, n は $m \geqq 1$, $n \geqq 2$ をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，$y = \log x$ の第1次導関数 y' と第2次導関数 y'' を求めよ．

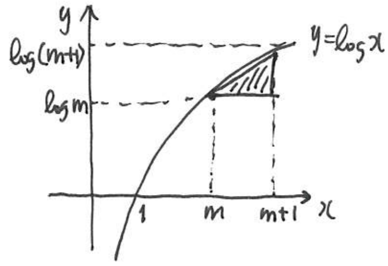
(2) 座標平面上の3点 $\mathrm{A}(m,\ \log m)$, $\mathrm{B}(m+1,\ \log m)$, $\mathrm{C}(m+1,\ \log(m+1))$ を頂点とする三角形の面積を S_m とする．S_m を m を用いて表せ．

(3) $f(m) = \log m + S_m - \int_m^{m+1} \log x\, dx$ とおく．$f(m) < 0$ が成り立つことを，$y = \log x$ のグラフを用いて説明せよ．

(4) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$ であることを用いて，不等式

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n\log n - n + 1 - \frac{1}{2}\log n$$

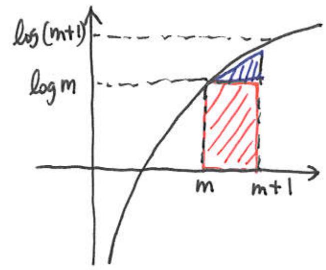
を証明せよ．



(5) 不等式 $n! < e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ を証明せよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$ //

(2) $S_m = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\{\log(m+1) - \log m\} = \dfrac{\log(m+1) - \log m}{2}$ //



(3) 右図の赤い斜線の面積は $\log m$ で

青い 〃 S_m なので，

(これらの和) $< \int_m^{m+1} \log x\, dx$ が成り立つ　∴ $f(m) < 0$ ▨

(4) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$ より．$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) + \underbrace{S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1}}_{= \frac{\log n - \log 1}{2}}$

$< \underbrace{\int_1^n \log x\, dx}_{= n\log n - n + 1}$

∴ $\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n\log n - n + 1 - \frac{1}{2}\log n$ ▨

(5) (4) より．$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log n < (n+1)\log n - n + 1 - \frac{1}{2}\log n$

∴ $\log n! < \log \dfrac{n^{n+1}\cdot e}{e^n \cdot \sqrt{n}}$

∴ $n! < e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ ▨