0001691278038999

金沢大学

2014 年 理系 第 3 問

数理 石井K

3 行列

$$P=\begin{pmatrix} x & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & y \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $P^2=P$ をみたす実数の組 $(x,\ y)$ は 2 組ある．これらを求めよ．

(2) (1) で求めた 2 つの組を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とし，それぞれに対応する行列 P を P_1，P_2 とおく．ただし，$x_1<x_2$ とする．このとき，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し

$$(P_1P_2)^nP_1=r_nP_1$$

をみたす実数 r_n を求めよ．

(3) 重複を許して P_1，P_2 を 6 個並べて得られる順列

$$Q_1\quad Q_2\quad Q_3\quad Q_4\quad Q_5\quad Q_6$$

のうちで $Q_1=P_1$ となるものすべてを考え，それぞれの順列に 6 個の行列の積 $P_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ を対応させる．このようにして得られる行列のうち，異なるものはいくつあるか．

(1) $P^2=\begin{pmatrix} x^2+\frac{2}{9} & \frac{\sqrt{2}}{3}(x+y) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}(x+y) & y^2+\frac{2}{9} \end{pmatrix}$ より．$P^2=P$ のとき．$x^2+\frac{2}{9}=x$，$x+y=1$，$y^2+\frac{2}{9}=y$

$\therefore (3x-2)(3x-1)=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$ $\quad\therefore (x,y)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ //

(2) $P_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad\therefore P_1P_2=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2\sqrt{2}}{9} \\ \frac{4\sqrt{2}}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

$\therefore (P_1P_2)^1\cdot P_1=\begin{pmatrix} \frac{8}{27} & \frac{8\sqrt{2}}{27} \\ \frac{8\sqrt{2}}{27} & \frac{16}{27} \end{pmatrix}=\frac{8}{9}P_1$ $\quad\therefore r_1=\frac{8}{9}$

$$\begin{aligned}\therefore (P_1P_2)^{n+1}P_1&=(P_1P_2)\cdot(P_1P_2)^nP_1\\&=P_1\cdot P_2\cdot r_nP_1\\&=r_nP_1P_2P_1\\&=\frac{8}{9}r_nP_1\end{aligned}$$

$\therefore r_{n+1}=\frac{8}{9}r_n$

$\{r_n\}$ は初項 $\frac{8}{9}$，公比 $\frac{8}{9}$ の等比数列となるので，

$r_n=\left(\frac{8}{9}\right)^n$ //

(3) $P_1^2=P_1$，$P_2^2=P_2$ より．

積は $(P_1P_2)^1$，$(P_1P_2)^2$，$(P_1P_2)^3$，P_1，$(P_1P_2)P_1$，$(P_1P_2)^2P_1$

のいずれかとなる．また (2) より．

$(P_1P_2)^nP_1=\left(\frac{8}{9}\right)^nP_1$

$n\geqq 2$ に対して $(P_1P_2)^n=r_{n-1}P_1P_2$

これらと．$r_n\neq 1$，$P_1P_2\neq P_1$ より

この 6 つの積は互いに異なる

$\therefore$ 6 個 //