

2012年 医学部 第4問

4 曲線  $C: y = \log x$  上に異なる2点  $A(a, \log a)$ ,  $B(b, \log b)$  をとり,  $C$  の  $A$  における接線と  $B$  における接線の交点について考える. 次の問いに答えよ.

- (1) 任意に与えられた  $a > 1$  に対して, 2本の接線の交点がちょうど直線  $x = 1$  上にくるような  $b$  が唯一だけ存在し,  $b < 1$  であることを示せ.
- (2) 2点  $A(a, \log a)$ ,  $B\left(\frac{1}{a}, \log \frac{1}{a}\right)$  ( $a > 1$ ) について, 2本の接線の交点の  $x$  座標が1より大きいか小さいかを調べよ.
- (3)  $k$  を自然数とする.  $a = 1 + \frac{1}{k}$  として (2) の結果を使って, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \log n \quad (n \geq 2)$$