旭川医科大学

2013年 医学部 第2問

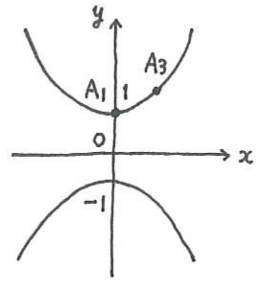
数理 石井K

$\boxed{2}$ a を正の実数とする．双曲線 C：$x^2-a^2y^2+a^2=0$ 上の4点 $\mathrm{A_1}(0,\ 1)$，$\mathrm{A_2}(0,\ -1)$，$\mathrm{A_3}(a,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A_4}(-2a,\ -\sqrt{5})$ が与えられている．$\mathrm{A_1}$ における C の接線を ℓ_1，$\mathrm{A_3}$ における C の接線を ℓ_3 とする．次の問いに答えよ．

(1) ℓ_1 と ℓ_3 の交点Sの座標を求めよ．

(2) 直線 $\mathrm{A_1A_2}$ と直線 $\mathrm{A_3A_4}$ の交点Uの座標，および直線 $\mathrm{A_1A_4}$ と直線 $\mathrm{A_2A_3}$ の交点Vの座標を求めよ．

(3) 3点S，U，Vが同一線上にあることを示せ．



(1) $y^2-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ よりCは右のようになる．

$\therefore\ \ell_1：y=1$，$\ell_3：ax-\sqrt{2}a^2y+a^2=0$

すなわち，$\ell_3：x-\sqrt{2}ay+a=0$

$\therefore$ 交点 $\underline{S((\sqrt{2}-1)a,\ 1)}$ //

(2) $A_1A_2：x=0$，$A_3A_4：y=\dfrac{\sqrt{2}-(-\sqrt{5})}{a-(-2a)}(x-a)+\sqrt{2}$

$\Longleftrightarrow\ y=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3a}(x-a)+\sqrt{2}$

$\therefore\ \underline{U\left(0,\ \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}\right)}$ //

$A_1A_4：y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2a}x+1$　　$A_2A_3：y=\dfrac{\sqrt{2}+1}{a}x-1$

$x=\dfrac{4a}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}$　有理化して．$x=a(\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+3)$

このとき．$y=\sqrt{5}+2\sqrt{2}$　　$\therefore\ \underline{V((\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+3)a,\ \sqrt{5}+2\sqrt{2})}$ //

(3) 直線 SU：$y=\dfrac{1-\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}}{(\sqrt{2}-1)a}x+\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$　$\xrightarrow{\text{有理化}}$　$\therefore\ SU：y=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}{3a}x+\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$

$x=(\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+3)a$ を代入すると，$y=\dfrac{(\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+3)a}{3a}+\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ y=\dfrac{10-5\sqrt{2}-2\sqrt{5}+3\sqrt{10}+5\sqrt{2}-5-\sqrt{10}+3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{10}-2+3\sqrt{2}-\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$

$=2\sqrt{2}+\sqrt{5}$

$\therefore$ Vは直線SU上にあることが示せた　$\therefore$ 3点 S, U, V は同一直線上にある ▨