旭川医科大学

2015年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ $f(p,\ q,\ r)=p^3-q^3-27r^3-9pqr$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(p,\ q,\ r)$ を因数分解せよ．

(2) 等式 $f(p,\ q,\ r)=0$ と $p^2-10q-30r=11$ との両方を満たす正の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ．

(1) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$a=p,\ b=-q,\ c=-3r$ を代入して，

$f(p,q,r)=\underline{(p-q-3r)(p^2+q^2+9r^2+pq-3qr+3pr)}$ //

(2) (1)より． $f(p,q,r)=0 \iff p-q-3r=0$ または． $p^2+q^2+9r^2+pq-3qr+3pr=0$

(i) $p-q-3r=0$ が成り立つとき．

$3r=p-q$ を $p^2-10q-30r=11$ に代入して，

$p^2-10p-11=0 \quad \therefore (p-11)(p+1)=0 \quad p>0$ より $p=11$

このとき． $q+3r=11 \quad q>0,\ r>0$ であることから．

$(p,q,r)=(11,8,1),\ (11,5,2),\ (11,2,3)$

(ii) $p^2+q^2+9r^2+pq-3qr+3pr=0$ が成り立つとき．

$\frac{1}{2}(p+q)^2+\frac{1}{2}(p+3r)^2+\frac{1}{2}(q-3r)^2=0$ より．

この式は
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2$
に $a=p,\ b=-q,\ c=-3r$ を代入
することで得られる

$p=-q$ ，かつ， $p+3r=0$ かつ $q=3r$

これを $p^2-10q-30r=11$ に代入して．r だけの式にすると．

$9r^2-60r-11=0 \quad \therefore r=\frac{10\pm\sqrt{111}}{3}$ これは整数でないので不適

(i)，(ii)より求める組は，

$\underline{(p,q,r)=(11,8,1),\ (11,5,2),\ (11,2,3)}$ //