



2014年 教育学部 (数学・技術) 第2問

2 座標平面において、動点 $P(x, y)$ は単位円 C 上の点 $Q(1, 0)$ を出発し、 C 上を反時計回りに1周する。弧 PQ の長さは、出発してから時間に比例する。 P が1周するのに T 秒かかる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 出発してから t 秒後 ($0 \leq t \leq T$) の点 $P(x, y)$ について x, y を t と T を用いて表せ。
 (2) 出発してから t 秒後 ($0 \leq t \leq \frac{T}{4}$) の点 $P(x, y)$ に対して $z = 2x^2 + xy + y^2$ を考える。 z の最大値と最小値を求めよ。また最大値、最小値をとるのは出発してから何秒後か T を用いて表せ。

(1) 原点を O とすると OP が x 軸の正の向きとなす角 θ は

$$\theta = \frac{t}{T} \cdot 2\pi \quad \text{と表せる}$$

$$\therefore x = \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad y = \sin \frac{2\pi t}{T}$$

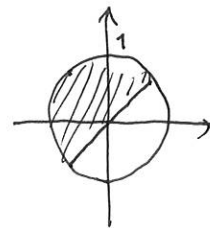
$$(2) z = 2 \cos^2 \frac{2\pi t}{T} + \sin \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} + \sin^2 \frac{2\pi t}{T}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 + \cos \frac{4\pi t}{T}}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi t}{T} + \frac{1 - \cos \frac{4\pi t}{T}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi t}{T} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi t}{T}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\frac{4\pi t}{T} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{3}{2}$$

$$\text{ここで } \frac{\pi}{4} \leq \frac{4\pi t}{T} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \quad \text{より}$$



$$z \text{ の } \begin{cases} \text{最大値は } \frac{3+\sqrt{2}}{2} \quad \left(t = \frac{T}{16} \text{ のとき} \right) & \leftarrow \frac{4\pi t}{T} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ をといた} \\ \text{最小値は } 1 \quad \left(t = \frac{T}{4} \text{ のとき} \right) & \leftarrow \frac{4\pi t}{T} + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi \text{ をといた} \end{cases}$$