



2016年医学部第2問

2 1辺の長さが2の立方体 ABCD-EFGHがある。下の図1のように、2辺 BC, CD上に、 $BS = CT = x$  ( $0 \leq x \leq 2$ )を満たす点 S, Tをとる。このとき、三角形 ESTの面積の最大値と最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。

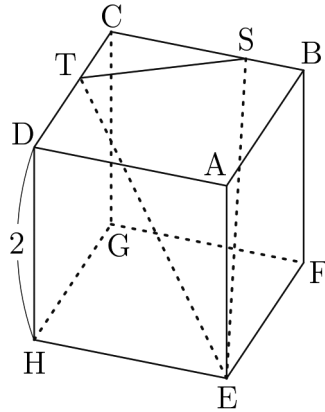


図1

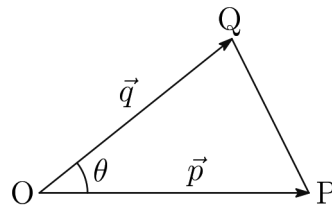


図2

(1) 上の図2を参考にして、三角形 OPQ において  $\vec{OP} = \vec{p}$ ,  $\vec{OQ} = \vec{q}$  とおくと、三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ。

(2)  $\vec{EF} = \vec{a}$ ,  $\vec{EH} = \vec{b}$ ,  $\vec{EA} = \vec{c}$  とおく。立方体の1辺の長さが2であることに注意して、 $\vec{ES}$ ,  $\vec{ET}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  および  $x$  を用いて表せ。また、 $|\vec{ES}|^2$ ,  $|\vec{ET}|^2$  を、それぞれ  $x$  の式として表せ。さらに、 $\vec{ES}$  と  $\vec{ET}$  の内積  $\vec{ES} \cdot \vec{ET}$  は、 $x$  によらない一定の値になることを示せ。

(3) 上の(1)を利用して三角形 EST の面積  $f(x)$  を求めよ。

(4)  $0 \leq x \leq 2$  の範囲で、 $f(x)$  の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値も答えよ。