



2013年第3問

3 k, m, n は整数とし, $n \geq 1$ とする. ${}_m C_k$ を二項係数として, $S_k(n), T_m(n)$ を以下のように定める.

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$\begin{aligned} T_m(n) &= {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \cdots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2) \end{aligned}$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ.
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ.
- (3) p が 3 以上の素数のとき, $S_k(p-1)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, p-2$) は p の倍数であることを示せ.