

2014年 医学部 第11問

 数理
石井K

11 点Pが楕円 $x^2 + 4y^2 = 4$ の上を動くとき、Pから定点 $A(a, 0)$ ($0 < a < \frac{3}{2}$) への距離 $L(p)$ の最小値を求めよ。

$P(p, q)$ とおくと P は楕円上の点より。

$$p^2 + 4q^2 = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$L(p) = \sqrt{(p-a)^2 + q^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

②に①を代入して、 q を消去すると。

$$L(p) = \sqrt{p^2 - 2ap + a^2 + 1 - \frac{1}{4}p^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}p^2 - 2ap + a^2 + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}a\right)^2 - \frac{1}{3}a^2 + 1}$$

$$0 < a < \frac{3}{2} \text{ より}$$

$$0 < \frac{4}{3}a < 2$$

$$\therefore -2 \leq p \leq 2 \text{ より}$$

$$p = \frac{4}{3}a \text{ となる } P \text{ は存在する。}$$

$$\therefore L(p) \text{ の最小値は } \sqrt{1 - \frac{1}{3}a^2} \quad (p = \frac{4}{3}a \text{ のとき})$$

//