徳島大学

2015年 医学部 第1問

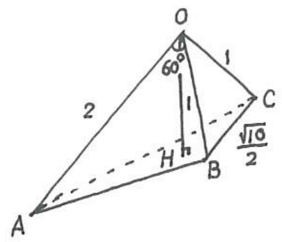
数理 石井K

$\boxed{1}$ 四面体OABCにおいて $OA=2$，$OB=OC=1$，$BC=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$\angle AOB=\angle AOC=60^\circ$ とする．点Oから平面ABCに下ろした垂線をOHとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) 四面体OABCの体積を求めよ．

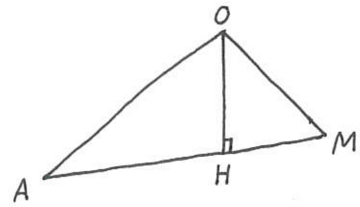


(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ=\underline{1}$ //

余弦定理より，$\cos\angle BOC=\dfrac{1^2+1^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{2\cdot1\cdot1}=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\underline{-\frac{1}{4}}$ // $\quad\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=\underline{1}$ //

(2) 線分BCの中点をMとする．



$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

また，図形の対称性より，辺AM上に点Hはあるので

$\overrightarrow{OH}=(1-s)\vec{a}+s\overrightarrow{OM}$ と表せる

$\therefore\ \overrightarrow{OH}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{1}{2}s\vec{c}$

また，$\overrightarrow{AM}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$ で

$OH\perp$ 平面ABC より $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AM}$ なので $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}=\left\{(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{1}{2}s\vec{c}\right\}\cdot\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=-(1-s)\cdot4+\frac{1}{2}(1-s)+\frac{1}{2}(1-s)-\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}s+\frac{1}{4}s\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}s\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}s$$

$$=\frac{19}{8}s-3$$

$\therefore\ s=\frac{24}{19}\qquad\therefore\ \underline{\overrightarrow{OH}=-\frac{5}{19}\vec{a}+\frac{12}{19}\vec{b}+\frac{12}{19}\vec{c}}$ //

(3) (2)より．$|\overrightarrow{OH}|^2=\frac{1}{19^2}\left(25\cdot4+144\cdot1+144\cdot1-120\cdot1-120\cdot1+288\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{4}{19}\quad\therefore|\overrightarrow{OH}|=\frac{2}{\sqrt{19}}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$（余弦定理より）

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\frac{7}{4}\quad\therefore\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{9-\frac{49}{16}}=\frac{\sqrt{95}}{8}\quad\therefore V=\frac{\sqrt{95}}{8}\cdot\frac{2}{\sqrt{19}}\cdot\frac{1}{3}=\underline{\frac{\sqrt{5}}{12}}$ //