徳島大学

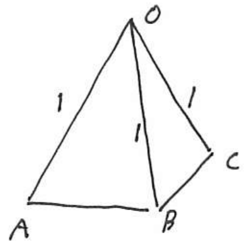
2014年 第2問

$\boxed{2}$ 四面体OABCにおいて $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2}{3}$ が成り立つとき，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\alpha$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\beta$ として次の問いに答えよ．

(1) s, t を実数として $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ と表される点Hを，$\overrightarrow{CH}$ が $\vec{a}$ および $\vec{b}$ と垂直となるようにとる．このとき，α，β を s，t の式で表せ．

(2) 三角形ABCの重心をGとする．(1)の点Hに対して，$\overrightarrow{HG}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$ となるとき，α，β の値を求めよ．

(3) α，β が(2)で求めた値をとるとき，$|\overrightarrow{CH}|$ の値を求めよ．



(1) $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

$\therefore\ \overrightarrow{CH}\perp\vec{a}$ より $s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$\therefore\ s+\frac{2}{3}t-\alpha=0$ —— ①

$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{b}$ より $s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\therefore\ \frac{2}{3}s+t-\beta=0$ —— ②

①より．$\underline{\alpha=s+\frac{2}{3}t}$ // ②より．$\underline{\beta=\frac{2}{3}s+t}$ //

(2) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ より $\overrightarrow{HG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-s\vec{a}-t\vec{b}$

$=\left(\frac{1}{3}-s\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$\therefore\ \frac{1}{3}-s=0,\ \frac{1}{3}-t=0$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が一次独立であることから

(1)より．$\alpha=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$，$\beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$ $\quad\therefore\ \underline{\alpha=\beta=\frac{5}{9}}$ //

(3) $|\overrightarrow{CH}|^2=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2st\,\vec{a}\cdot\vec{b}-2s\,\vec{c}\cdot\vec{a}-2t\,\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+1+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}$

$=\frac{17}{27}$

$\therefore\ \underline{|\overrightarrow{CH}|=\frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{51}}{9}}$ //