2014年 工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = \sin\left(\dfrac{3}{2}x\right) + \dfrac{3}{4}x$ と $g(x) = \dfrac{3}{4}x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$0 \leqq x \leqq \pi$ とする．

(1) $f(x)$ の増減，凹凸を調べ，極値を求めよ．また，$y = f(x)$ のグラフをかけ．

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点を求めよ．

(3) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

(1) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\cos\left(\dfrac{3}{2}x\right) + \dfrac{3}{4}$

$= \dfrac{3}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{3}{2}x\right) + \dfrac{1}{2}\right\}$

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{9}\pi$	$\cdots$	$\frac{8}{9}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

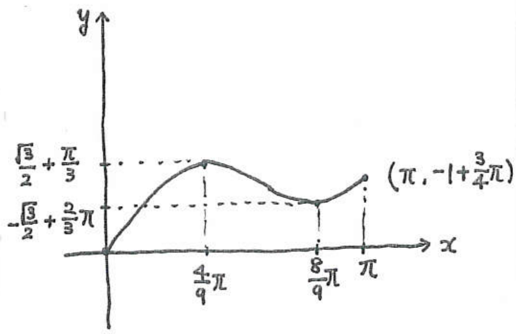
$\therefore$ $0 \leqq x \leqq \pi$ より，$0 \leqq \dfrac{3}{2}x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ なので，

$f'(x) = 0$ となるのは，$\dfrac{3}{2}x = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

すなわち，$x = \dfrac{4}{9}\pi,\ \dfrac{8}{9}\pi$

$f\left(\dfrac{4}{9}\pi\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{3}$，$f\left(\dfrac{8}{9}\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2}{3}\pi$，$f(\pi) = -1 + \dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore$ 右のグラフになる．

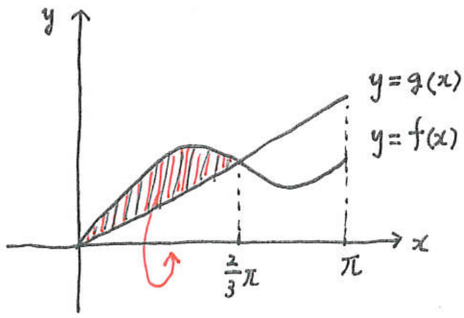


(2) $f(x) - g(x) = \sin\left(\dfrac{3}{2}x\right) = 0$ より，

$x = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi$ $\therefore$ 共有点は $(0, 0), \left(\dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$ //

(3) (1)(2) より 右のグラフ のようになり，

求める体積 を V とおくと，



$$V = \pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2\, dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2}x\sin\left(\frac{3}{2}x\right) dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1-\cos 3x}{2}\, dx + \frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x\left\{-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right\}' dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \frac{3}{2}\pi\left[-\frac{2}{3}x\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} - \frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi} -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi + \frac{3}{2}\pi\cdot\frac{4}{9}\pi + \pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) dx = \underline{\pi^2}\ //$$