0001894185018999

星薬科大学

2013年 薬学部 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\dfrac{1}{41}$，$a_{n+1}+2na_{n+1}a_n-a_n=0$ を満たしているとき，

$\dfrac{1}{a_5}=\boxed{6}\boxed{1}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{a_n}=\boxed{4}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{0}\boxed{0}$

である．

$a_2+2\cdot1\cdot a_2a_1-a_1=0 \quad \therefore \dfrac{43}{41}a_2=\dfrac{1}{41} \quad \therefore a_2=\dfrac{1}{43}$

$a_3+4a_3\cdot\dfrac{1}{43}-\dfrac{1}{43}=0 \quad \therefore \dfrac{47}{43}a_3=\dfrac{1}{43} \quad \therefore a_3=\dfrac{1}{47}$

$a_4+6a_4\cdot\dfrac{1}{47}-\dfrac{1}{47}=0 \quad \therefore \dfrac{53}{47}a_4=\dfrac{1}{47} \quad \therefore a_4=\dfrac{1}{53}$

$a_5+8a_5\cdot\dfrac{1}{53}-\dfrac{1}{53}=0 \quad \therefore \dfrac{61}{53}a_5=\dfrac{1}{53} \quad \therefore a_5=\dfrac{1}{61} \quad \therefore \dfrac{1}{a_5}=61$ //

最初からこのように $\dfrac{1}{a_5}$ を求めてもよい

$(1+2na_n)a_{n+1}=a_n$ より．$a_1>0$ と合わせて帰納的に考えると．

$a_n>0$ となるので．漸化式の両辺を $a_n\cdot a_{n+1}\ (\neq 0)$ でわると．

$\dfrac{1}{a_n}+2n-\dfrac{1}{a_{n+1}}=0 \quad \therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+2n$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと．$b_{n+1}-b_n=2n$

$\therefore b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k \quad (n\geqq2) \qquad \therefore b_n=41+\sum_{k=1}^{n-1}2k$

$b_n=n^2-n+41$

これは $n=1$ のときもみたしている．

$\therefore a_n=\dfrac{1}{n^2-n+41}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{50}n^2-n+41$

$=\dfrac{1}{6}\cdot50\cdot51\cdot101-\dfrac{1}{2}\cdot50\cdot51+41\cdot50$

$=42925-1275+2050$

$=43700$ //