



2012年第4問

 数理
石井K

4 a を $a > 1$ である実数とする. 関数 $f(x) = 2a^{3x+1} - a^{2x+2} - 2a^{2x} + a^{x+1}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $a > \sqrt{2}$ とする. $f(x) \leq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ.

(2) $a \leq \sqrt{2}$ とする. $f(x) \leq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ.

$$(1) f(x) = a^{2x+1}(2a^x - a) - a^x(2a^x - a)$$

$$= (2a^x - a)(a^{2x+1} - a^x)$$

$$= a^x(a^{x+1} - 1)(2a^x - a)$$

$$= a^{x+1}\left(a^x - \frac{1}{a}\right)(2a^x - a)$$

$$\therefore f(x) \leq 0 \iff a^{x+1}\left(a^x - \frac{1}{a}\right)(2a^x - a) \leq 0$$

$$\iff \left(a^x - \frac{1}{a}\right)\left(a^x - \frac{a}{2}\right) \leq 0 \quad (\because a^{x+1} > 0 \text{ より}) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\iff \frac{1}{a} \leq a^x \leq \frac{a}{2} \quad (\because a > \sqrt{2} \text{ より})$$

$$\iff \underline{-1 \leq x \leq 1 - \log_a 2} \quad (\text{底が } a \text{ の対数をとり, } \tau =)$$

$$(2) \textcircled{1} \text{ より, } f(x) \leq 0 \iff \frac{a}{2} \leq a^x \leq \frac{1}{a} \quad (\because 1 < a \leq \sqrt{2} \text{ より})$$

$$\iff \underline{1 - \log_a 2 \leq x \leq -1}$$