防衛医科大学校

2015 年 医学部 第 4 問

$\boxed{4}$ 関数 $f_1(x)=\dfrac{2}{1+e^x}$，$\log f_2(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt$，$\log f_3(x)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x f_2(t)\,dt$，$\log f_4(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x f_3(t)\,dt$，$\cdots$,

$$\log f_k(x)=\frac{(-1)^k}{2}\int_0^x f_{k-1}(t)\,dt \quad (k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

とする．ただし，log は自然対数である．また，

$$g_k(x)=f_k(x)\times\frac{x\sin x}{4-\cos^2 x} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とする．さらに，

$$I_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\int_{-\pi}^{\pi} g_k(x)\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

$$J=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx,$$

$$K=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx$$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f_k(x)$ を積分を使わずに表せ（$k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$）．

(2) I_n を J で表せ（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）．

(3) J を K で表せ．

(4) I_n を求めよ（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）．