



2012年第4問

4 数列  $\{x_n\}$  を

$$x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + x_n(1 - \log x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めることにする.  $e$  を自然対数の底として, 以下の問に答えよ.

- (1) 実数  $x$  が  $0 < x < e$  のとき,  $\frac{1}{e}(e-x) < 1 - \log x < \frac{1}{x}(e-x)$  となることを示せ.
- (2)  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し,  $1 \leq x_n < e$  であることを示せ.
- (3)  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し,  $e - x_{n+1} < \left(1 - \frac{1}{e}\right)(e - x_n)$  であることを示せ.
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$  であることを示せ.