0001856183418999

福井大学

2014年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 1から7までの数を1つずつ書いた7個の玉が，袋の中に入っている．袋から玉を1個取り出し，書かれている数を記録して袋に戻す．この試行を n 回繰り返して得られる n 個の数の和が4の倍数となる確率を p_n とする．ただし，n は正の整数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_1 と p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n の式で表せ．

(3) p_n を求めよ．また極限値 $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

(1, 3), (1, 7), (2, 2), (2, 6) (3, 1)
(3, 5), (4, 4), (5, 3), (5, 7), (6, 2)
(6, 6), (7, 1), (7, 5)

(1) $p_1 = \frac{1}{7}$, $p_2 = \frac{13}{49}$ //

(2)

n−1回目.	→	n回目.
4の倍数	→	4を引く
4の倍数+1	→	3, 7を引く
4の倍数+2	→	2, 6 〃
4 〃 +3	→	1, 5 〃

このことから．

$$p_{n+1} = \frac{1}{7}p_n + (1-p_n)\cdot\frac{2}{7}$$

$$\therefore p_{n+1} = \frac{2}{7} - \frac{1}{7}p_n$$ //

(3) $p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{7}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$

$\therefore$ 数列 $\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{4} = \frac{-3}{28}$，公比 $-\frac{1}{7}$ の等比数列

$$\therefore p_n - \frac{1}{4} = -\frac{3}{28}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1} \qquad \therefore p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^n$$ //

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{7}\right)^n = \frac{1}{4}$$ //