センター試験

2015年 数学IIB 第3問

$\boxed{3}$ 自然数 n に対し，2^n の一の位の数を a_n とする．また，数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{4} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots①$$

を満たすとする．

(1) $a_1 = 2$，$a_2 = \boxed{\text{ア}}$，$a_3 = \boxed{\text{イ}}$，$a_4 = \boxed{\text{ウ}}$，$a_5 = \boxed{\text{エ}}$ である．このことから，すべての自然数 n に対して，$a_{\boxed{\text{オ}}} = a_n$ となることがわかる．$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪〜④ のうちから一つ選べ．

⓪ $5n$　① $4n+1$　② $n+3$　③ $n+4$　④ $n+5$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう．① を繰り返し用いることにより

$$b_{n+4} = \frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^{\boxed{\text{カ}}}} b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことがわかる．ここで，$a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n = 3 \cdot 2^{\boxed{\text{キ}}}$ であることから，$b_{n+4} = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} b_n$ が成り立つ．このことから，自然数 k に対して

$$b_{4k-3} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{k-1}, \quad b_{4k-2} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{k-1}$$

$$b_{4k-1} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{k-1}, \quad b_{4k} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{k-1}$$

である．

(3) $S_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$ とおく．自然数 m に対して

$$S_{4m} = \boxed{\text{タ}}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{m} - \boxed{\text{チ}}$$

である．

(4) 積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を T_n とおく．自然数 k に対して

$$b_{4k-3}b_{4k-2}b_{4k-1}b_{4k} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{\boxed{\text{テ}}(k-1)}$$

であることから，自然数 m に対して

$$T_{4m} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}^{\,m}}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{\boxed{\text{ト}}m^2 - \boxed{\text{ナ}}m}$$

である．また，T_{10} を計算すると，$T_{10} = \dfrac{3^{\boxed{\text{ニ}}}}{2^{\boxed{\text{ヌネ}}}}$ である．