# センター試験

2015年 数学IIB 第4問

$\boxed{4}$ 1辺の長さが1のひし形OABCにおいて，$\angle \mathrm{AOC} = 120^\circ$ とする．辺ABを $2:1$ に内分する点をPとし，直線BC上に点Qを $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となるようにとる．以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく．

(1) 三角形OPQの面積を求めよう．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}$ である．実数 $t$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表されるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\text{エ}}\,t\vec{a} + \vec{b}$ である．

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\text{キ}}$ であることから，$t = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

これらのことから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である．

よって，三角形OPQの面積 $S_1$ は，$S_1 = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である．

(2) 辺BCを $1:3$ に内分する点をRとし，直線ORと直線PQとの交点をTとする．$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表し，三角形OPQと三角形PRTの面積比を求めよう．

Tは直線OR上の点であり，直線PQ上の点でもあるので，実数 $r$，$s$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = r\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

と表すと，$r = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$，$s = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ となることがわかる．よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\vec{b}$$

である．

上で求めた $r$，$s$ の値から，三角形OPQの面積 $S_1$ と，三角形PRTの面積 $S_2$ との比は，$S_1 : S_2 = \boxed{\text{ヘホ}} : 2$ である．