

2011年数学IIB第1問

1 [1] $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ のとき、関数

$$y = \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 2 \sin \theta$$

の最小値を求めよう。

$$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \text{ とおくと}$$

$$t^2 = \boxed{\text{ア}} \cos^2 \theta + \boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}} \sin \theta \cos \theta + \boxed{\text{エ}}$$

であるから $y = t^2 - \boxed{\text{オ}} t - \boxed{\text{カ}}$ となる。また $t = \boxed{\text{キ}} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}\right)$ である。

$\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$ のとり得る値の範囲は $-\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}} \leq \theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}} \leq \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$ であるから、 t のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{コサ}} \leq t \leq \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。したがって、 y は $t = \boxed{\text{ス}}$ 、すなわち $\theta = -\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ のとき、最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

[2] 自然数 x で、条件

$$12(\log_2 \sqrt{x})^2 - 7 \log_4 x - 10 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x + \log_3 x < 14 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

を満たすものを求めよう。

まず、 x を正の実数として、条件①を考える。①は $X = \log_2 x$ とおくと

$$6X^2 - \boxed{\text{チ}} X - \boxed{\text{ツテ}} > 0$$

となる。この2次不等式を解くと

$$X < -\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} < X$$

となる。したがって、条件①を満たす最小の自然数 x は $\boxed{\text{ネ}}$ であり、 $\boxed{\text{ネ}}$ 以上のすべての自然数 x は①を満たす。

次に、条件②について考えると、②を満たす最大の自然数 x は $\boxed{\text{ノハ}}$ であり、 $\boxed{\text{ノハ}}$ 以下のすべての自然数 x は②を満たす。

したがって、求める x は $\boxed{\text{ネ}}$ 以上 $\boxed{\text{ノハ}}$ 以下の自然数である。