センター試験

2015年 数学IIB 第1問

$\boxed{1}$ 〔1〕Oを原点とする座標平面上の2点 $P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$Q(2\cos\theta+\cos7\theta,\ 2\sin\theta+\sin7\theta)$ を考える．ただし，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ とする．

(1) $OP=\boxed{ア}$，$PQ=\boxed{イ}$ である．また

$$OQ^2=\boxed{ウ}+\boxed{エ}(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)=\boxed{ウ}+\boxed{エ}\cos(\boxed{オ}\theta)$$

である．よって，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，OQは $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{カ}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる．

(2) 3点O，P，Qが一直線上にあるような θ の値を求めよう．
直線OPを表す方程式は $\boxed{ク}$ である．$\boxed{ク}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=0$　① $(\sin\theta)x+(\cos\theta)y=0$
② $(\cos\theta)x-(\sin\theta)y=0$　③ $(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$

このことにより，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，3点O，P，Qが一直線上にあるのは $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{ケ}}$ のときであることがわかる．

(3) ∠OQPが直角となるのは $OQ=\sqrt{\boxed{コ}}$ のときである．したがって，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，∠OQPが直角となるのは $\theta=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi$ のときである．

〔2〕a，b を正の実数とする．連立方程式 $(*)$ $\begin{cases} x\sqrt{y^3}=a \\ \sqrt[3]{x}y=b \end{cases}$ を満たす正の実数 x，y について考えよう．

(1) 連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x，y は

$$x=a^{\boxed{ス}}b^{\boxed{セソ}},\quad y=a^pb^{\boxed{タ}}$$

となる．ただし $p=\dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}$ である．

(2) $b=2\sqrt[3]{a^4}$ とする．a が $a>0$ の範囲を動くとき，連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x，y について，$x+y$ の最小値を求めよう．
$b=2\sqrt[3]{a^4}$ であるから，$(*)$ を満たす正の実数 x，y は，a を用いて

$$x=2^{\boxed{セソ}}a^{\boxed{トナ}},\quad y=2^{\boxed{タ}}a^{\boxed{ニ}}$$

と表される．したがって，相加平均と相乗平均の関係を利用すると，$x+y$ は $a=2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{ヌ}}$ をとることがわかる．ただし $q=\dfrac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハ}}$ である．