0002066273397999

センター試験

2015年 数学IIB 第1問

$\boxed{1}$ 〔1〕Oを原点とする座標平面上の2点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$\mathrm{Q}(2\cos\theta+\cos 7\theta,\ 2\sin\theta+\sin 7\theta)$ を考える．ただし，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする．

(1) $\mathrm{OP} = \boxed{\text{ア}}$，$\mathrm{PQ} = \boxed{\text{イ}}$ である．また

$$\mathrm{OQ}^2 = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}(\cos 7\theta\cos\theta + \sin 7\theta\sin\theta) = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\cos(\boxed{\text{オ}}\,\theta)$$

である．よって，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，OQは $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる．

(2) 3点O，P，Qが一直線上にあるような θ の値を求めよう．

直線OPを表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である．$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 0$　① $(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = 0$

② $(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 0$　③ $(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

このことにより，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，3点O，P，Qが一直線上にあるのは $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる．

(3) ∠OQPが直角となるのは $\mathrm{OQ} = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである．したがって，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，∠OQPが直角となるのは $\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のときである．

〔2〕a，b を正の実数とする．連立方程式 $(*)$ $\begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{x}\,y = b \end{cases}$ を満たす正の実数 x，y について考えよう．

(1) 連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x，y は

$$x = a^{\boxed{\text{ス}}}b^{\boxed{\text{セソ}}},\quad y = a^p b^{\boxed{\text{タ}}}$$

となる．ただし $p = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である．

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする．a が $a > 0$ の範囲を動くとき，連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x，y について，$x+y$ の最小値を求めよう．

$b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから，$(*)$ を満たす正の実数 x，y は，a を用いて

$$x = 2^{\boxed{\text{セソ}}}a^{\boxed{\text{トナ}}},\quad y = 2^{\boxed{\text{タ}}}a^{\boxed{\text{ニ}}}$$

と表される．したがって，相加平均と相乗平均の関係を利用すると，$x+y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ をとることがわかる．ただし $q = \dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である．