センター試験

2015年 数学IIB 第4問

$\boxed{4}$ 1辺の長さが1のひし形OABCにおいて，$\angle \mathrm{AOC} = 120^\circ$ とする．辺ABを2：1に内分する点をPとし，直線BC上に点Qを $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となるようにとる．以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく．

(1) 三角形OPQの面積を求めよう．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\vec{b}$ である．実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表されるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{エ}\, t\vec{a} + \vec{b}$ である．

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{キ}$ であることから，$t = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

これらのことから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{シス}}}{\boxed{セ}}$ である．

よって，三角形OPQの面積 S_1 は，$S_1 = \dfrac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チツ}}$ である．

(2) 辺BCを1：3に内分する点をRとし，直線ORと直線PQとの交点をTとする．$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表し，三角形OPQと三角形PRTの面積比を求めよう．

Tは直線OR上の点であり，直線PQ上の点でもあるので，実数 r，s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = r\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

と表すと，$r = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$，$s = \dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ となることがわかる．よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{\boxed{ヌネ}}{\boxed{ノハ}}\vec{a} + \frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}\vec{b}$$

である．

上で求めた r，s の値から，三角形OPQの面積 S_1 と，三角形PRTの面積 S_2 との比は，$S_1 : S_2 = \boxed{ヘホ} : 2$ である．