センター試験

2011年 数学IIB 第4問

$\boxed{4}$ 四角錐OABCDにおいて，三角形OBCと三角形OADは合同で，$\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{OC}=\sqrt{3}$であり，底面の四角形ABCDは長方形である．$\mathrm{AB}=2r$とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表すと$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\boxed{\text{ア}}}-\overrightarrow{\boxed{\text{イ}}}+\vec{c}$である．辺ODを1：2に内分する点をLとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=-\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a}-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{c}$$

となる．

さらに辺OBの中点をM，3点A，L，Mの定める平面をαとし，平面αと辺OCとの交点をNとする．点Nは平面α上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$は実数$s$，$t$を用いて$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=s\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(\boxed{\text{キ}}-\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{\boxed{\text{コ}}}+\frac{t}{\boxed{\text{サ}}}\right)\vec{b}+\frac{s}{\boxed{\text{シ}}}\vec{c}$$

となる．一方，点Nは辺OC上にもある．これらから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{c}$となる．

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タ}}r^2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{チ}}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ツテ}}r^2$である．よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}$を計算すると，$\mathrm{AB}=\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$のとき，直線AMと直線MNは垂直になることがわかる．

(1) $(ab+1)(a+1)(b+1)+ab$ を因数分解せよ．

（与式）$=(ab+1)(ab+a+b+1)+ab$ ☞後の２つを展開

$=a^2b^2+a^2b+ab^2+ab+ab+a+b+1+ab$ ☞残りを展開

$=(b^2+b)a^2+(b^2+3b+1)a+b+1$ ☞aについての降べきの順

$=\Big\{(b+1)a+1\Big\}\Big\{ba+(b+1)\Big\}$ ☞たすきがけする

$=(ab+a+1)(ab+b+1)$ ▨

$$\begin{array}{ccc} (b+1) & & 1 \\ & \times & \\ b & & (b+1) \end{array}$$