


センター試験


2015年数学IIB第1問

1 [1] Oを原点とする座標平面上の2点 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta + \cos 7\theta, 2\sin\theta + \sin 7\theta)$ を考える. ただし, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする.

(1) $OP = \square{\text{ア}}$, $PQ = \square{\text{イ}}$ である. また

$$OQ^2 = \square{\text{ウ}} + \square{\text{エ}} (\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta) = \square{\text{ウ}} + \square{\text{エ}} \cos(\square{\text{オ}} \theta)$$

である. よって, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, OQ は $\theta = \frac{\pi}{\square{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\square{\text{キ}}}$ をとる.

(2) 3点 O, P, Q が一直線上にあるような θ の値を求めよう.

直線 OP を表す方程式は $\square{\text{ク}}$ である. $\square{\text{ク}}$ に当てはまるものを, 次の ①~③ のうちから一つ選べ.

- ① $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 0$ ② $(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = 0$
 ③ $(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 0$ ④ $(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

このことにより, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, 3点 O, P, Q が一直線上にあるのは $\theta = \frac{\pi}{\square{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる.

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは $OQ = \sqrt{\square{\text{コ}}}$ のときである. したがって, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, $\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \frac{\square{\text{サ}}}{\square{\text{シ}}} \pi$ のときである.

[2] a, b を正の実数とする. 連立方程式 (*) $\begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{xy} = b \end{cases}$ を満たす正の実数 x, y について考えよう.

(1) 連立方程式 (*) を満たす正の実数 x, y は

$$x = a \square{\text{ス}} b \square{\text{セソ}}, \quad y = a^p b \square{\text{タ}}$$

となる. ただし $p = \frac{\square{\text{チツ}}}{\square{\text{テ}}}$ である.

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする. a が $a > 0$ の範囲を動くとき, 連立方程式 (*) を満たす正の実数 x, y について, $x + y$ の最小値を求めよう.

$b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから, (*) を満たす正の実数 x, y は, a を用いて

$$x = 2 \square{\text{セソ}} a \square{\text{トナ}}, \quad y = 2 \square{\text{タ}} a \square{\text{ニ}}$$

と表される. したがって, 相加平均と相乗平均の関係を利用すると, $x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\square{\text{ヌ}}}$

をとることがわかる. ただし $q = \frac{\square{\text{ネノ}}}{\square{\text{ハ}}}$ である.