センター試験

2015 年 数学 IIB 第 2 問

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めよう．h が 0 でないとき，x が a から $a + h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は $\boxed{\text{ア}} + \dfrac{h}{\boxed{\text{イ}}}$ である．したがって，求める微分係数は

$$f'(a) = \lim_{h \to \boxed{\text{ウ}}} \left(\boxed{\text{ア}} + \frac{h}{\boxed{\text{イ}}} \right) = \boxed{\text{エ}}$$

である．

(2) 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ を C とし，C 上に点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ をとる．ただし，$a > 0$ とする．点 P における C の接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{オ}}\,x - \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}a^2$$

である．直線 ℓ と x 軸との交点 Q の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ 0\right)$ である．点 Q を通り ℓ に垂直な直線を m とすると，m の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}x + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

直線 m と y 軸との交点を A とする．三角形 APQ の面積を S とおくと

$$S = \frac{a(a^2 + \boxed{\text{セ}})}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる．また，y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積を T とおくと

$$T = \frac{a(a^2 + \boxed{\text{タ}})}{\boxed{\text{チツ}}}$$

となる．$a > 0$ の範囲における $S - T$ の値について調べよう．

$$S - T = \frac{a(a^2 - \boxed{\text{テ}})}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である．$a > 0$ であるから，$S - T > 0$ となるような a のとり得る値の範囲は $a > \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である．また，$a > 0$ のときの $S - T$ の増減を調べると，$S - T$ は $a = \boxed{\text{ヌ}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとることがわかる．