

2011年第4問

4 次のようなゲームを考える．成功の確率が p ($0 < p < 1$)，失敗の確率が $q (= 1 - p)$ であるような試行を A と B の 2 人が行い，先に成功した方を勝ちとする．なお，A が勝つ確率が B が勝つ確率より大きいとき，ゲームは A に有利であるといい，A が勝つ確率と B が勝つ確率が等しいとき，ゲームは公平であるという．このとき，次の問に答えよ．

- (1) A から始めて，以後交互に試行を行う．すなわち，ABABAB \cdots という順で試行を行う．このとき， p の値にかかわらずゲームは A に有利であることを示せ．
- (2) A から始めるが，A が 1 回に対して，B は 2 回試行を行えるとする．すなわち，ABBABB \cdots という順で試行を行う． p がどのような値のとき，ゲームは公平になるか．
- (3) (2) において，ゲームが公平であるとき， q についての等式 $q = q^2 + q^4 + q^6 + \cdots$ が成り立つことを示せ．