# 愛知教育大学

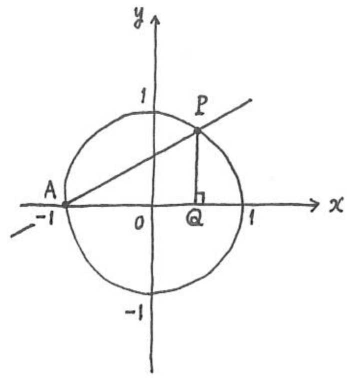
2013年 第6問



$\boxed{6}$ 座標平面上の円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と点 A$(-1,\ 0)$ に対し，点 A を通る傾き $m\ (m > 0)$ の直線と円 $C$ との交点で，点 A とは異なる点を P とする．また，点 P から $x$ 軸に下した垂線を PQ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を $m$ を用いて表せ．

(2) △APQ の面積を最大とする $m$ の値を求めよ．




(1) 点Aを通る傾き $m$ の直線は，

$y = m(x+1)$ であるから円の方程式に代入して，

$x^2 + m^2(x+1)^2 = 1$

$\therefore\ (1+m^2)x^2 + 2m^2x + m^2 - 1 = 0$

$\therefore\ (x+1)\{(1+m^2)x + m^2 - 1\} = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$

$\mathrm{P} \neq \mathrm{A}$ より，$\underline{\mathrm{P}\left(\dfrac{1-m^2}{1+m^2},\ \dfrac{2m}{1+m^2}\right)}$ //

(2) △APQ の面積を $S(m)$ とおくと，

$$S(m) = \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1-m^2}{1+m^2} - (-1)\right\}\cdot\frac{2m}{1+m^2}$$

$$= \frac{2m}{(1+m^2)^2}$$

$$\therefore\ S'(m) = \frac{2(1+m^2)^2 - 2m\cdot 2(1+m^2)\cdot 2m}{(1+m^2)^4}$$

$$= \frac{2(1+m^2) - 8m^2}{(1+m^2)^3}$$

$$= \frac{-6\left(m+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(m-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{(1+m^2)^3}$$

$m > 0$ より増減表は右のようになる．

| $m$ | (0) | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $S'(m)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $S(m)$ | (0) | ↗ | | ↘ |

$\therefore$ △APQ の面積が最大となるのは，$\underline{m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ //