

2013年第8問

8 Oを原点とする座標平面上を動く点Pの時刻 $t$ における座標 $P(x(t), y(t))$ が

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

で与えられている。

(1) 時刻 $t$ における点Pの速度ベクトル $\vec{v}_1(t) = (x'(t), y'(t))$ は、ある $2 \times 2$ 行列 $A$ によって

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

と表すことができる。この行列 $A$ を求めよ。

(2) Pの各座標の時刻 $t$ による $n$ 次導関数を成分とするベクトルを $\vec{v}_n(t) = (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t))$ とおく。このとき、 $n \geq 1$ に対し、

$$\begin{pmatrix} x^{(n)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

となることを、数学的帰納法を用いて示せ。

(3)  $\vec{v}_{2013}(\pi)$ を求めよ。