0002237452677999

千葉大学

2016年 理学部（数学・情報数理）第3問

1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$（$i$は虚数単位）とおく．

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ．

(2) $\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である．

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ．

(1) $z^7=\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)^7$

ド・モアブル

$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$

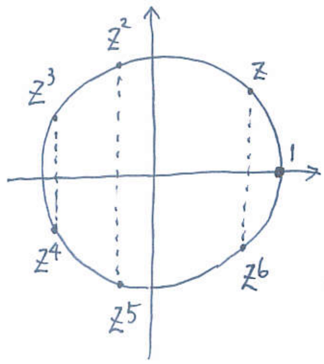
$=1$

$\therefore\ z^7-1=0$

$(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ より． $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

$\therefore\ z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\underline{-1}$ //



(2) $\overline{z}=z^6,\ \overline{z^2}=z^5,\ \overline{z^3}=z^4$，より．

$\alpha+\overline{\alpha}=z+z^2+z^4+\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}$

$=z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3$

$=\underline{-1}$ //

$\alpha\overline{\alpha}=(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)$

$=z^4+z^6+z^7+z^5+z^7+z^8+z^7+z^9+z^{10}$

$z^7=1$より

$=z^4+z^6+1+z^5+1+z+1+z^2+z^3$

$=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+3$

$=-1+3$

$=\underline{2}$ //

解と係数の関係より．$\alpha,\overline{\alpha}$ は $x^2+x+2=0$ の解であるから，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

虚部が大きい方がαであるから．$\underline{\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}}$ //

2枚目へつづく

2016年 理学部（数学・情報数理）第3問　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$（$i$ は虚数単位）とおく．

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ．

(2) $\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である．

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ．

(3) $1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$

は方程式 $x^7=1$ の解であるから，

$$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)\cdot(x-z^6)$$

両辺 $(x-1)$ でわって，

$$x^6+x^5+\cdots+x+1=(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^6)$$

$x=1$ を代入して，

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=\underline{7}$$ //