千葉大学

2015年 理学部（数学・情報数理）第1問

数理 石井K

1 k, m, nを自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2^kを7で割った余りが4であるとする．このとき，kを3で割った余りは2であることを示せ．

(2) $4m+5n$が3で割り切れるとする．このとき，2^{mn}を7で割った余りは4ではないことを示せ．

(1) (i) $k=3m$ (m:整数とする)のとき

二項定理

$$2^k = 2^{3m} = 8^m = (7+1)^m = \underbrace{7^m + {}_mC_1 \cdot 7^{m-1} + \cdots + {}_mC_{m-1} \cdot 7}_{7\text{の倍数}} + 1$$

よって，2^kを7で割ると，1余る

(ii) $k=3m+1$のとき

$$2^k = 2^{3m+1} = 2 \cdot 2^{3m} = 2(7^m + {}_mC_1\, 7^{m-1} + \cdots + {}_mC_{m-1} \cdot 7 + 1)$$

よって，2^kを7で割ると，2余る

(iii) $k=3m+2$のとき

$$2^k = 2^{3m+2} = 2^2 \cdot 2^{3m} = 4(7^m + {}_mC_1 \cdot 7^{m-1} + \cdots + {}_mC_{m-1} \cdot 7 + 1)$$

よって，2^kを7で割ると，4余る

(i)〜(iii)より，2^kを7で割った余りが4のとき，$k=3m+2$ (mは整数) と表せる

よって，kを3で割った余りは，2である ▨

(2) (1)の命題の対偶は，「kを3で割った余りが0または1ならば，2^kを7で割った余りは4ではない」 $\cdots$ (*)

$4m+5n = 3(m+2n)+m-n$ なので

$4m+5n$が3で割り切れる $\iff$ $m-n$が3で割り切れる

$\iff$ mを3で割った余りとnを3で割った余りが等しい

(i) $m=3m'$, $n=3n'$ (m', n'は整数)のとき

$mn = 9m'n'$ $\quad \therefore mn$は3で割り切れる $\quad$ (*)より，2^{mn}を7で割った余りは4ではない

(ii) $m=3m'+1$, $n=3n'+1$のとき

$mn = 9m'n'+3m'+3n'+1$ $\quad \therefore mn$を3で割った余りは1 $\quad$ (*)より，2^{mn}を7で割った余りは4ではない

(iii) $m=3m'+2$, $n=3n'+2$のとき

$mn = 9m'n'+6m'+6n'+4$ $\quad \therefore mn$を3で割った余りは1 $\quad$ (*)より，2^{mn}を7で割った余りは4ではない

(i)〜(iii)より，題意は示された ▨