千葉大学

2016年 教育学部（算数・技術） 第3問

$\boxed{3}$ 座標平面上に5点 A(0, 0)，B(0, 1)，C(1, 1)，D(1, 0)，$E\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$ がある．点Eと点 $P_1(s,\ 1)$ $(0 < s < 1)$ を通る直線を ℓ_1 とする．直線 $y = 1$ に関して ℓ_1 と対称な直線を ℓ_2 とし，ℓ_2 と直線 $x = 1$ の交点を P_2 とする．さらに，直線 $x = 1$ に関して ℓ_2 と対称な直線 ℓ_3 は x 軸と線分AD上で交わるとし，その交点を P_3 とする．

(1) 直線 ℓ_2 が点Dを通るときの s の値を求めよ．

(2) 線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ．

(3) $EP_1 + P_1P_2 + P_2P_3$ の最大値と最小値を求めよ．

(1) $\ell_1 : y = \dfrac{1-\frac{2}{3}}{s-0}x + \dfrac{2}{3}$　　∴ $\ell_1 : y = \dfrac{1}{3s}x + \dfrac{2}{3}$

∴ $\ell_2 : y = -\dfrac{1}{3s}(x-s)+1$　　∴ $\ell_2 : y = -\dfrac{1}{3s}x + \dfrac{4}{3}$ …①

これがD(1,0)を通るので、$0 = -\dfrac{1}{3s} + \dfrac{4}{3}$　　∴ $\underline{s = \dfrac{1}{4}}$ //

(2) ①式に $x=1$ を代入して、P_2 を求めると、$P_2\left(1,\ -\dfrac{1}{3s}+\dfrac{4}{3}\right)$

また、$\ell_3 : y = \dfrac{1}{3s}(x-1) - \dfrac{1}{3s} + \dfrac{4}{3}$

∴ $\ell_3 : y = \dfrac{1}{3s}x - \dfrac{2}{3s} + \dfrac{4}{3}$

$y=0$ を代入して、P_3 を求めると、$P_3(-4s+2,\ 0)$

∴ $DP_3 = |-4s+2-1| = |4s-1|$ …②

ℓ_3 は x 軸と線分AD上で交わることから、$0 \leqq -4s+2 \leqq 1$　　∴ $\dfrac{1}{4} \leqq s \leqq \dfrac{1}{2}$ …③

②,③より、$\underline{DP_3 = 4s-1 \quad \left(\dfrac{1}{4} \leqq s \leqq \dfrac{1}{2}\right)}$ //

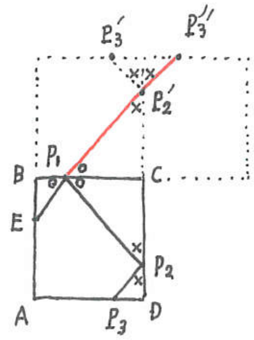
(3) 右図のように図形を $y=1$ で折り返したときに

P_2, P_3 が移る点を P_2', P_3' とし、さらにそれを $x=1$ で折り返したときに

P_3' が移る点を P_3'' とすると、

$EP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 = EP_1 + P_1P_2' + P_2'P_3'' = EP_3''$ (線分)

$P_3(-4s+2,\ 0)$ より、$P_3'(-4s+2,\ 2)$, $P_3''(4s,\ 2)$



∴ $EP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 = \sqrt{(4s)^2 + \left(2-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{16s^2 + \frac{16}{9}} = 4\sqrt{s^2+\frac{1}{9}}$

$\dfrac{1}{4} \leqq s \leqq \dfrac{1}{2}$ より、$\begin{cases} \text{最大値}\ \dfrac{2}{3}\sqrt{13}\ \left(s = \dfrac{1}{2}\text{のとき}\right) \\ \text{最小値}\ \dfrac{5}{3}\ \left(s = \dfrac{1}{4}\text{のとき}\right) \end{cases}$ //