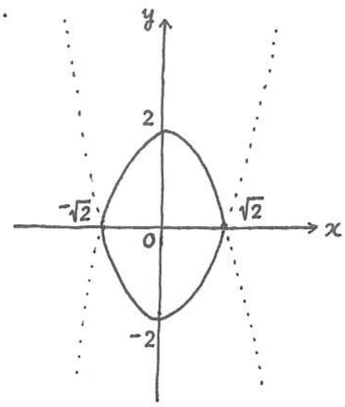
2016年 教育学部（算数・技術）第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で，点 P は放物線 $y = -x^2 + 2$ 上を動き，点 Q は放物線 $y = x^2 - 2$ 上を動く．ただし，P と Q は異なる点とする．

(1) 直線 PQ が原点を通るとき，線分 PQ の長さの最大値と最小値を求めよ．

(2) 線分 PQ の長さの最大値を求めよ．



(1) 直線 PQ が原点を通るとき，P と Q は原点に関して対称なので

$P(t, -t^2+2)$, $Q(-t, t^2-2)$ $(-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$ と表せる．

$$\therefore PQ = 2\sqrt{t^2+(-t^2+2)^2}$$
$$= 2\sqrt{t^4-3t^2+4}$$
$$= 2\sqrt{\left(t^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

ここで，$0 \leqq t^2 \leqq 2$ より，最大値は 4，最小値は $\sqrt{7}$ //

$t^2=0$ すなわち $t=0$ のとき

$t^2=\frac{3}{2}$ すなわち，$t=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき

(2) 直線 PQ が原点を通らないときを考えると，

$\triangle OPQ$ において，三角形の成立条件より，

$PQ < OP + OQ$ …①

ここで，$P(t, -t^2+2)$ とおくと，

$OP = \sqrt{t^2+(-t^2+2)^2}$ よって，(1) の計算より，$OP \leqq 2$

図形の対称性より，$OQ \leqq 2$

よって，①より，$PQ < OP + OQ \leqq 4$

∴ (1) とあわせて，PQ の最大値は 4 //