千葉大学

2017年 理学部（数学・情報数理）第1問　　1枚目/2

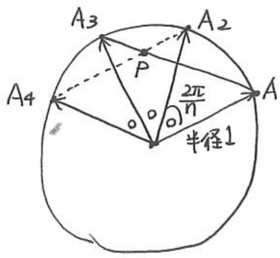
増田

$\boxed{1}$ nを4以上の整数とする．座標平面上で正n角形$A_1A_2\cdots A_n$は点Oを中心とする半径1の円に内接している．$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$とし，$k=2\cos\frac{2\pi}{n}$とおく．そして，線分$A_1A_3$と線分$A_2A_4$との交点Pは線分$A_1A_3$を$t:1-t$に内分するとする．

(1) $\vec{a}$および$\vec{d}$を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，kを用いて表せ．

(2) tをkを用いて表し，$\frac{1}{2}\leqq t<\frac{3}{4}$を示せ．

(3) 不等式$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$を示せ．



(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$

$\vec{a}=x\vec{b}+y\vec{c}$ とおく。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x+y\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{n}$

$\therefore\ x+\frac{k}{2}y=\frac{k}{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=x\vec{b}\cdot\vec{c}+y=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\left(2\times\frac{2\pi}{n}\right)$

$\therefore\ \frac{k}{2}x+y=2\left(\frac{k}{2}\right)^2-1$

連立方程式

$$\begin{cases} x+\frac{k}{2}y=\frac{k}{2} \\ \frac{k}{2}x+y=\frac{k^2}{2}-1 \end{cases}$$

を解くと、　$x=k$，$y=-1$

$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ //

また、$\vec{d}$の場合も$\vec{d}=x\vec{b}+y\vec{c}$とおいて、$\vec{c}\cdot\vec{d}$と$\vec{b}\cdot\vec{d}$を計算することから　$x=-1$，$y=k$

$\vec{d}=-\vec{b}+k\vec{c}$ //

(2) PはA_1A_3を$t:1-t$に内分するので

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}$

$=(k-kt)\vec{b}+(2t-1)\vec{c}$

Pは直線A_2A_4上にもあるので、

$\overrightarrow{A_2P}$と$\overrightarrow{A_2A_4}$は実数倍の関係にある。

$\overrightarrow{A_2P}=\overrightarrow{OP}-\vec{b}$

$=(k-kt-1)\vec{b}+(2t-1)\vec{c}$

$\overrightarrow{A_2A_4}=\vec{d}-\vec{b}$

$=-2\vec{b}+k\vec{c}$

$(k-kt-1):(-2)=(2t-1):k$ だから

$(k^2-4)t=(k+1)(k-2)$

ここで、$\cos\frac{2\pi}{n}\neq1$ より $k\neq2$

両辺を$(k-2)$で割り、

$(k+2)t=k+1$

また、nは4以上だから

$0\leqq\cos\frac{2\pi}{n}<1$

$0\leqq k<2$

よってさらに $k+2\ (\neq0)$で割って

$t=\dfrac{k+1}{k+2}$ //

$t=\dfrac{k+1}{k+2}=1-\dfrac{1}{k+2}$

$0\leqq k<2$では、

$\frac{1}{2}\leqq t<\frac{3}{4}$

となる。

千葉大学

2017年 理学部（数学・情報数理）第1問　　2枚目/2

増田

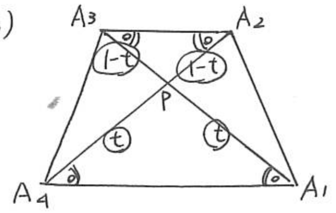
$\boxed{1}$ nを4以上の整数とする．座標平面上で正n角形$A_1A_2\cdots A_n$は点Oを中心とする半径1の円に内接している．$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$とおく．そして，線分$A_1A_3$と線分$A_2A_4$との交点Pは線分$A_1A_3$を$t:1-t$に内分するとする．

(1) $\vec{a}$および$\vec{d}$を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，kを用いて表せ．

(2) tをkを用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$を示せ．

(3) 不等式$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$を示せ．

(3)



対応する円周角が等しいなどの条件から、

$\triangle A_1A_4P \backsim \triangle A_3A_2P$

かつ $A_2A_3 \parallel A_1A_4$ となる。

四角形$A_1A_2A_3A_4$の面積をSとすると、

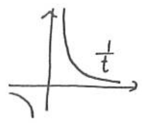
$\triangle PA_2A_3=(1-t)^2S$

$\triangle A_1A_2A_4=tS$

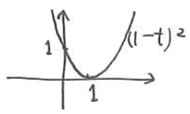
$$\frac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}=\frac{(1-t)^2S}{tS}=\frac{(1-t)^2}{t}$$

$\frac{1}{2}\leqq t<\frac{3}{4}$の範囲で$\frac{(1-t)^2}{t}$の最小値を求める。

$$\frac{(1-t)^2}{t}=\frac{1}{t}\times(1-t)^2$$



関数$\frac{1}{t}$は$\frac{1}{2}\leqq t<\frac{3}{4}$で単調減少



関数$(1-t)^2$は$\frac{1}{2}\leqq t<\frac{3}{4}$で単調減少

よって$\frac{(1-t)^2}{t}$は$t=\frac{3}{4}$で最小値をとり、

$$\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^2\times\frac{4}{3}=\frac{1}{12}$$

以上より、$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$が示された。

㊣