0002076723297999

高知大学

2015年第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $0 \leqq t < 2\pi$ とする．関数 $f(x) = 2x^2 + (2 + \sin t)x + \cos^2 t - 2$ について，次の問いに答えよ．

(1) $t = \frac{\pi}{2}$ のとき，$y = f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) t がどのような値であっても，$y = f(x)$ のグラフは x 軸と異なる2つの共有点を持つことを示せ．

(3) $y = f(x)$ のグラフが，x 軸から切り取る線分の長さの最小値を求めよ．

(4) (3)のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) $t = \frac{\pi}{2}$ のとき．$f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

$= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$

∴ 最小値は $-\frac{25}{8}$ $\left(x = -\frac{3}{4}\text{ のとき}\right)$ //

(2) $f(x) = 0$ の判別式を D とすると．

$D = (2 + \sin t)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (\cos^2 t - 2)$

$= (2 + \sin t)^2 + 8(2 - \cos^2 t)$

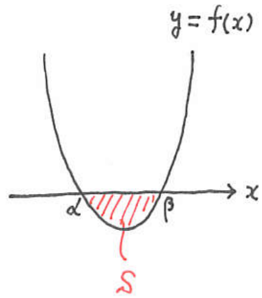
ここで，$-1 \leqq \cos t \leqq 1$ より．$0 \leqq \cos^2 t \leqq 1$ ∴ $2 - \cos^2 t > 0$

また，$(2 + \sin t)^2 > 0$ より．$D > 0$ となる．

∴ t の値によらず，$y = f(x)$ のグラフは x 軸と異なる2つの共有点をもつ ■

(3) $y = f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標をそれぞれ α, β $(\alpha < \beta)$ とおくと．

解と係数の関係より．$\alpha + \beta = -\frac{2 + \sin t}{2}$，$\alpha\beta = \frac{\cos^2 t - 2}{2}$



$\therefore (\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= \left(-\frac{2 + \sin t}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\cos^2 t - 2}{2}$

$= \frac{9}{4}\sin^2 t + \sin t + 3$

$= \frac{9}{4}\left(\sin t + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{26}{9}$

∴ $\sin t = -\frac{2}{9}$ のとき．切り取る線分の長さは最小値 $\frac{\sqrt{26}}{3}$ をとる． //

(4) $S = \int_\alpha^\beta -f(x)\,dx$

$= -2\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx$

$= -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (\beta - \alpha)^3$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{26}{9} \cdot \frac{\sqrt{26}}{3}$

∴ $S = \frac{26}{81}\sqrt{26}$ //