

2015年 理工学部 第2問

2 直線  $l: y = ax + b$  と曲線  $C: y = \log x$  ( $x > 0$ ) は接するものとする。ただし、 $a, b$  は定数であり、 $a > 0$  とする。このとき、次の間に答えよ。

(1)  $b$  を  $a$  を用いて表せ。

(2)  $l$  と  $C$  および  $x$  軸で囲まれた図形の面積を  $S$  とする。 $0 < a < 1$  のとき、 $S$  を  $a$  を用いて表せ。

(1) 接点を  $(t, \log t)$  ( $t > 0$ ) とおくと、 $(\log x)' = \frac{1}{x}$  より

$$\text{接線は } y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t \quad \therefore y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t$$

これが  $y = ax + b$  と一致することから、係数を比較して、

$$\begin{cases} \frac{1}{t} = a \\ -1 + \log t = b \end{cases}$$

$$\therefore b = -1 + \log \frac{1}{a} \quad \therefore \underline{b = -\log a - 1} //$$

(2) (1) より 接点は  $(\frac{1}{a}, -\log a)$  で、

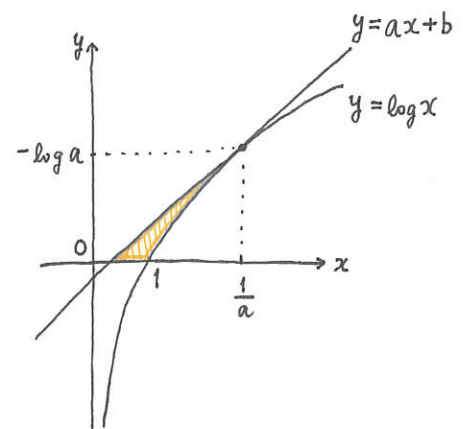
$$l \text{ と } x \text{ 軸との交点の } x \text{ 座標は } -\frac{b}{a} = \frac{\log a + 1}{a}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{\log a + 1}{a} \right) \cdot (-\log a) - \int_1^{\frac{1}{a}} \log x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\log a)^2}{a} - [x \log x]_1^{\frac{1}{a}} + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{1}{a} \, dx$$

$$= \frac{(\log a)^2}{2a} + \frac{\log a}{a} + \frac{1}{a} - 1$$

$$= \underline{\underline{\frac{(\log a)^2 + 2 \log a - 2a + 2}{2a}}} //$$



$$S = \triangle - \text{扇形}$$