0002007362997999

佐賀大学

2015年 理工学部 第2問

$\boxed{2}$ 直線 $\ell : y = ax + b$ と曲線 $C : y = \log x \ (x > 0)$ は接するものとする．ただし，a, b は定数であり，$a > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．

(2) ℓ と C および x 軸で囲まれた図形の面積を S とする．$0 < a < 1$ のとき，S を a を用いて表せ．

(1) 接点を $(t, \log t)$ $(t > 0)$ とおくと，$(\log x)' = \frac{1}{x}$ より

接線は $y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t$ $\quad \therefore y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t$

これが $y = ax + b$ と一致することから，係数を比較して，

$$\begin{cases} \frac{1}{t} = a \\ -1 + \log t = b \end{cases}$$

$\therefore\ b = -1 + \log \frac{1}{a}$ $\qquad \therefore\ \underline{b = -\log a - 1}$ //

(2) (1)より接点は $\left(\frac{1}{a}, -\log a\right)$ で，

ℓ と x 軸との交点の x 座標は $-\frac{b}{a} = \frac{\log a + 1}{a}$

$$\therefore S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{\log a + 1}{a}\right) \cdot (-\log a) - \int_1^{\frac{1}{a}} \log x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\log a)^2}{a} - \Big[x \log x\Big]_1^{\frac{1}{a}} + \int_1^{\frac{1}{a}} dx$$

$$= \frac{(\log a)^2}{2a} + \frac{\log a}{a} + \frac{1}{a} - 1$$

$$= \underline{\frac{(\log a)^2 + 2\log a - 2a + 2}{2a}}$$ //