



2014年理系第5問

5  $r$  を 0 以上の整数とし、数列  $\{a_n\}$  を次のように定める。

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、素数  $p$  を 1 つとり、 $a_n$  を  $p$  で割った余りを  $b_n$  とする。ただし、0 を  $p$  で割った余りは 0 とする。

- (1) 自然数  $n$  に対し、 $b_{n+2}$  は  $b_{n+1}(b_n + 1)$  を  $p$  で割った余りと一致することを示せ。
- (2)  $r = 2$ ,  $p = 17$  の場合に、10 以下のすべての自然数  $n$  に対して、 $b_n$  を求めよ。
- (3) ある 2 つの相異なる自然数  $n$ ,  $m$  に対して、

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき、 $b_n = b_m$  が成り立つことを示せ。

- (4)  $a_2, a_3, a_4, \dots$  に  $p$  で割り切れる数が現れないとする。このとき、 $a_1$  も  $p$  で割り切れないことを示せ。