0001372457268999

# 金沢大学

2012年 理系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $n \geqq 3$ とする．1個のサイコロを $n$ 回振る．この $n$ 回の試行のうちで6の目がちょうど2回，しかも続けて出る確率を $p_n$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $p_3$，$p_4$ を求めよ．

(2) $p_n$ を求め，

$$p_{n+1} - \frac{5}{6}p_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

であることを示せ．

(3) $s_n = p_3 + p_4 + \cdots + p_n$ として，$\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ．ただし，必要ならば，$|r| < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることは使ってよい．

(1) ⑥⑥⊗，⊗⑥⑥ の場合なので

$$P_3 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 = \underline{\frac{5}{108}}$$ //

⑥⑥⊗⊗，⊗⑥⑥⊗，⊗⊗⑥⑥ の場合なので

$$P_4 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 3 = \underline{\frac{25}{432}}$$ //

(2) (1)と同じように計算すると，

$$P_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdot (n-1) \qquad \therefore \underline{P_n = \frac{(n-1)\cdot 5^{n-2}}{6^n} \quad (n \geqq 3)}$$ //

$$P_{n+1} - \frac{5}{6}P_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot n - \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdot (n-1)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\{n-(n-1)\}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \quad ■$$

(3) (2)で示した等式を $n=3$ から $n$ まで足しあわせて，

$$\sum_{k=3}^{n} P_{k+1} - \frac{5}{6}P_k = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

$$\therefore -\frac{5}{6}P_3 + \frac{1}{6}P_4 + \frac{1}{6}P_5 + \cdots + \frac{1}{6}P_{n-1} + \frac{1}{6}P_n + P_{n+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{\frac{25}{36}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\}}{1-\frac{5}{6}}$$

両辺6倍して，

$$-5P_3 + (P_4 + P_5 + \cdots + P_n) + 6P_{n+1} = \frac{25}{36}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\}$$

$$\therefore S_n - 6 \cdot \frac{5}{108} + 6 \cdot \frac{n \cdot 5^{n-1}}{6^{n+1}} = \frac{25}{36}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\} \qquad \therefore S_n = \frac{35}{36} - \frac{n+5}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \underline{\frac{35}{36}}$$ //