

2015年理系2第3問



3 座標平面において、極方程式 $r = 2\cos\theta$ で表される曲線を C とし、 C 上において極座標が $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, $(2, 0)$ である点をそれぞれ A, B とする。また、 A, B を通る直線を l とし、 A を中心とし、線分 AB を半径にもつ円を D とする。

(1) 曲線 C は直交座標において点 $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ を中心とし、半径が $\boxed{\text{ウ}}$ の円を表す。

(2) 直線 l の極方程式は $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}\right) = \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(3) 円 D の極方程式は $r = \frac{\boxed{\text{カ}}}{2} \sqrt{\frac{\boxed{\text{キ}}}{2}} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}\right)$ である。

$$(1) x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$\text{また, } r = 2 \cos \theta \text{ より, } r^2 = 2r \cos \theta$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2x$$

$$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \therefore \text{点}(1, 0) \text{ を中心とし, 半径が } 1 \text{ の円}$$

(2) 直交座標にすると、 $A(1, 1), B(2, 0) \therefore l: y = -x + 2$

$$\therefore \text{極方程式は, } r \sin \theta = -r \cos \theta + 2$$

$$\therefore r(\cos \theta + \sin \theta) = 2$$

$$\therefore \sqrt{2} r \left(\cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2$$

$$\therefore r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$(3) AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore D: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

$$r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2r(\cos \theta + \sin \theta) = 0$$

$$\therefore r^2 = 2\sqrt{2} r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$