

2014年 医学部 第4問

4 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

三角形 ABC において  $AB = AC = 1$ ,  $\angle BAC = 2\theta$  とする。

(1) 三角形 ABC の内接円  $C_1$  の半径を  $R_1(\theta)$  とする。  $R_1(\theta)$  を  $\theta$  の式で表すと  $R_1(\theta) =$   である。また  $\theta$  を  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲で変化させるときに  $R_1(\theta)$  が最大値をとるような  $\theta$  の値を  $\theta_1$  とすると

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^k \theta_1 = \text{  }$$

が成り立つ。

(2) 三角形 ABC の内側に次のように円  $C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$  を作る。円  $C_1$  の外側にあつて円  $C_1$  および辺 AB, AC に同時に接する円を  $C_2$  とし、円  $C_1, C_2$  の外側にあつて円  $C_2$  および辺 AB, AC に同時に接する円を  $C_3$  とする。以下同様に自然数  $n \geq 2$  に対して、円  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  の外側にあつて円  $C_{n-1}$  および辺 AB, AC に同時に接する円を  $C_n$  とする。  $C_n$  の半径  $R_n(\theta)$  を  $\theta$  と  $n$  の式で表すと  $R_n(\theta) =$   である。

(3)  $x$  の 2 次式  $g_n(x) =$   に対して

$$\frac{d}{d\theta} \log R_n(\theta) = -\frac{g_n(\sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta}$$

が成り立つ。また  $\theta$  を  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲で変化させるときに  $R_n(\theta)$  が最大値をとるような  $\theta$  の値を  $\theta_n$  とすると  $\sin \theta_n =$   である。

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \theta_n =$   である。このことから、 $\theta = \theta_n$  のときの円  $C_n$  の面積  $S_n$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n =$   が成り立つ。