0001864275318999

お茶の水女子大学

2014 年 第 3 問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 放物線 $y=x^2$ を C, $y=-x^2+2x+4$ を D とする．実数 t を用いて表される D 上の点 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+2t+4)$ における D の接線を ℓ とする．

$\hookrightarrow -(x-1)^2+5$

(1) C と D が異なる 2 点で交わることを示し，その x 座標を求めよ．

(2) 接線 ℓ の方程式を $y=f(x)$ とする．$f(x)$ を求めよ．

(3) (1) で求めた 2 交点の x 座標を a, b $(a<b)$ とする．$a<t<b$ を満たす t に対して，(2) で求めた接線 ℓ の方程式を $y=f(x)$ とする．次の連立不等式の表す領域の面積を $S(t)$ とする．

$$\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq f(x) \\ y \geqq -x^2+2x+4 \end{cases}$$

t が $a<t<b$ の範囲を動くとき，$S(t)$ が最小となる t の値と，そのときの $S(t)$ の値を求めよ．

(1) $x^2-(-x^2+2x+4)=0$ より $x^2-x-2=0$ $\therefore (x-2)(x+1)=0$

$\therefore \underline{x=2,\ -1}$ // $\therefore$ 交点は $(2,4),\ (-1,1)$

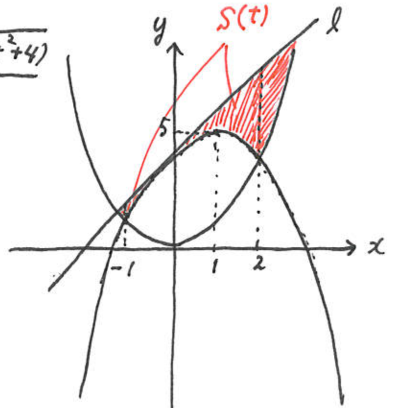
(2) $y'=-2x+2$ $\therefore \ell : y=(-2t+2)(x-t)-t^2+2t+4$

$\therefore \ell : y=-2(t-1)x+t^2+4$ $\therefore \underline{f(x)=-2(t-1)x+t^2+4}$ //

(3) ℓ と C の交点の x 座標を求めると．

$x^2+2(t-1)x-t^2-4=0$ $\therefore x=\dfrac{-2(t-1)\pm\sqrt{4(t-1)^2+4(t^2+4)}}{2}$

$\therefore x=1-t\pm\sqrt{2t^2-2t+5}$ （これを α, β $(\alpha<\beta)$ とおく）．



$$S(t)=\int_\alpha^\beta f(x)-x^2\,dx-\int_{-1}^{2}-x^2+2x+4-x^2\,dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx+2\int_{-1}^{2}(x-2)(x+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3-\frac{2}{6}\cdot 3^3$$

$$=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2t^2-2t+5}\right)^3-9$$

$$=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2(t-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{9}{2}}\right)^3-9$$

$\therefore \underline{t=\frac{1}{2}\text{ のとき 最小値 } 9(\sqrt{2}-1) \text{ をとる}}$ //