岡山大学

2015年 文系 第2問

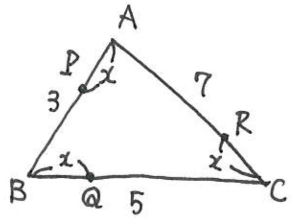
数理 石井K

$\boxed{2}$ 3辺の長さが AB＝3，BC＝5，CA＝7の三角形ABCがある．辺AB，BC，CA上の点P，Q，Rを，AP＝BQ＝CR＝xとなるようにとる．ただし，$0<x<3$である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ∠ABCの値を求めよ．

(2) 三角形BPQの面積をxの式で表せ．

(3) 三角形PQRの面積が最小となるときのxの値を求めよ．



この図は正確ではありません

(1) 余弦定理より．

$7^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos\angle ABC$

$\therefore \cos\angle ABC=-\frac{1}{2}$　　$\therefore \underline{\angle ABC=120^\circ}$ //

(2) 求める面積をSとおくと．

$S=\frac{1}{2}\cdot(3-x)\cdot x\cdot\sin 120^\circ$

$=\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}x(3-x)}$ //

(3) △ABCの面積をTとおくと．

$\triangle BPQ=T\times\frac{x}{5}\times\frac{3-x}{3}$，$\triangle APR=T\times\frac{x}{3}\times\frac{7-x}{7}$

$\triangle CRQ=T\times\frac{x}{7}\times\frac{5-x}{5}$

$\therefore \triangle PQR=T-\frac{x(3-x)}{15}T-\frac{x(7-x)}{21}T-\frac{x(5-x)}{35}T$

（ここで，$T=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ=\frac{15}{4}\sqrt{3}$ である．）← Tは定数

$\therefore \triangle PQR=\frac{105-7x(3-x)-5x(7-x)-3x(5-x)}{105}T$

$=\frac{15\left(x-\frac{71}{30}\right)^2+\frac{1259}{60}}{105}T$

$\therefore$ △PQRの面積が最小となるのは．$\underline{x=\frac{71}{30}\text{ のとき}}$ //